

Teaching Methods of Operational Research Based on the Cultivation of key competencies: A Case of Teaching in Nash Equilibrium Solution of Non-cooperative Game

Xiujun Wu^{1,a}, Peiyi Wang^{2,b}, Ling Gai^{3,c}, Cairong Xiang^{1,d*}

^{1,4} School of Mathematics and Computer Science, Jiangnan University, Wuhan, China

²Faculty of Science, University of Melbourne, Melbourne, Australia

³Department of Public Administration, Law School of Jiangnan University, Wuhan, China

^awxj1818@sina.com, ^bPeiyiw1@student.unimelb.edu.au

^cjdgeling@sohu.com, ^dcairongxiang111@hotmail.com

*Corresponding author

Keywords: key competencies, Nash Equilibrium, Prisoner's Dilemma, Teaching method.

Abstract. As the “key competency” has become the focus of teaching and learning, forming the student’s essential quality has also turned into another aim of our education. This article takes the teaching of Nash equilibrium solution in non-cooperative game theory as an example, discusses the cultivation of the mathematical essential quality in the operational research in the perspective of “modeling - analysis - solution – concept analysis - concept application and expansion”.

基于核心素养培养的运筹学教学方法探究: 基于合作博弈的教学案例

吴秀君^{1,a},汪沛毅^{2,b},盖玲^{3,c},向彩容^{1,d*}

^{1,4}江汉大学数学与计算机科学学院, 武汉, 湖北, 中国

²墨尔本大学理学院, 墨尔本, 澳大利亚

³江汉大学法学院公共管理系, 武汉, 湖北, 中国

^awxj1818@sina.com, ^bPeiyiw1@student.unimelb.edu.au

^cjdgeling@sohu.com, ^dcairongxiang111@hotmail.com

*通讯作者

关键词: 核心素养; 纳什均衡; 囚徒困境; 教学方法

中文摘要. “核心素养”已经成为教育教学关注的焦点。从学生发展和数学课程教学的角度理解, 数学核心素养是学生学习数学应当达成的有特定意义的综合性能力。培养学生的学科核心素养已然是教学的又一目标。文章以非合作博弈的纳什均衡解的教学为例, 从“建模—分析—求解—概念解析—概念应用拓展”来谈在运筹学中数学核心素养的培养。

1. 引言

近年来, “核心素养”正在引领课程教材改革以及教学方式改革, 成为教育的热门话题。核心素养是学生在接受相应学段的教育过程中, 逐步形成的适应个人终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力^[1]。它是关于学生知识、技能、情感、态度、价值观等多方面要求的结合体; 它指向过程, 关注学生在培养过程中的体悟, 而非结果导向。数学核心素养的本质, 是描述一个人经过数学教育后应当具有的数学特质, 大体上可分为“三会”, 即: 会用数

学的眼光观察世界，会用数学的思维思考世界，会用数学的语言表达世界^[2]。对数学而言，主要是数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析六个方面的核心素养^[1]。

下面我们借助于运筹学教学中的“纳什均衡解”概念的教学设计来谈谈核心素养的培养。

2. 引例

体会1：用数学的思维看问题，用数学语言表示问题，这就是建立数学模型。

例题1 甲乙两个在市场竞争中，各自都在考虑是否要降价。如果两家均降价，则每家各获利100元；如果都不降价，则各获利300元；如果一家降价，另一家不降价，则降价的一家因多销而获利500元，不降价的一家因商品滞销而亏损200元。问双方该如何选择？若这两家公司因某种缘故决定合作，请问他们的合作结局是什么？

当甲乙处于竞争地位时，这是一个非合作博弈。假设局中人都是理性的，都会选择对自己有利的策略。双方对于选择的策略集和策略对的后果都具有完全知识。得益矩阵如图1。

表 1:例题1的收益矩阵

		乙	
		降价	不降价
甲	收益矩阵		
	降价	100,100	500,-200
	不降价	-200,500	300,300

表2: 用划线法分析表1中收益矩阵

		乙	
		降价	不降价
甲	收益矩阵		
	降价	<u>100,100</u>	<u>500,-200</u>
	不降价	-200, <u>500</u>	300,300

3. 求解（划线法）

要点：用逻辑推理结合直观想象，经过数学运算，求解数学模型。

当已知甲方采取降价策略时，乙方的最优策略是降价（在对应的得益矩阵收益处划一短线,即在一行第1列的第2个数字处，甲乙双方的收益都是100）；当已知甲方采取不降价策略时，乙方的最优策略是降价，即在2行第1列的第2个数字处划线，甲乙双方的收益分别是-200和500。反过来，若已知乙方降价，则甲方的最优反应是降价，在在1行第1列的第1个数字处划线；若已知乙方不降价，则甲方的最优反应是降价，在1行第2列的第1个数字处划线.最终得到图1的划线收益矩阵。

从划线情况来看策略，只有（降价，降价）这个策略对是双划线的，也就是该策略组合的双方策略都是对对方的最优反应，表明给定一方采取该策略组合中的策略，则另一方都愿意采取该策略组合中的策略，因此该策略具有稳定性。因此得到该博弈的结果是（降价，降价）。由此也引出博弈论中纳什均衡的概念。

4. 定义

重点：从例题求解过程总结并提炼数学概念，培养数学抽象能力。

在博弈 G 中，有 n 个参与方， S_i 为局中人 i 的策略集， $s_{ij} \in S_i$ 表示局中人 i 的第 j 个策略； u_i 表示局中人 i 的收益，是各博弈方策略的多元函数。如果由各个博弈方的各一个策略组成的某个策略组合 $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ 中，任一博弈方 i 的策略 s_i^* ，都是对其余博弈方策略的组合 $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ 的最佳对策，也即 $u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{ij}, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ 对任意 $s_{ij} \in S_i$ 都成立，则称 $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ 为 G 的一个纳什均衡^[3]。

5. 纳什均衡概念的历史影响

重点：激发学生兴趣，引导学科研究前沿

约翰·福布斯·纳什（John Forbes Nash），曾任普林斯顿大学数学系教授，1948年获得硕士学位，1950年获得美国普林斯顿高等研究院的博士学位，是继冯·诺依曼之后最伟大的博弈论大师之一。1950年在他的博士论文《非合作博弈》中提出的著名的纳什均衡的概念，成为非合作博弈理论的核心。纳什均衡理论奠定了现代主流博弈理论和经济理论的根本基础，以纳什均衡为核心的博弈论现已广泛应用于经济学、管理学、社会学、政治学、军事科学等领域，1994年纳什因此获得诺贝尔奖经济学奖。

6. 概念解析

重点：让数学回归生活，使学生体悟概念的本质，能学以致用，培养数学核心素养。

我们知道，博弈论研究的主要话题就是求解各参与人的最优策略，并预测博弈的结果。

与我们之前的最优性问题求解不同的是，博弈中个体的选择不是基于静态的基本面可以做出的，而是必须考虑其他参与人的选择与自己的策略选择共同导致的结果，因此动态的相互影响成为求解最优策略的核心和难点。

纳什均衡定义解析：每个人的策略都是给定其他人策略选择时的最优反应。这样的策略组合才能成为博弈的均衡，否则，至少有一方会继续寻求达到对对方策略的最优反应，而使得该策略组合呈现非稳定态。而博弈的纳什均衡解简称为“互为最优反应”。“互为最优反应”可以解释生活，经济，政治和社会中许多现象。

7. 从引例的另一解法引出数学思想

重点：从引例的不同算法，提炼出数学思想和生活智慧：在最坏的情况下谋求相对最好的结果，即极小极大原则或者悲观-乐观原则。

例题1中，若选择降价，则己方的收益可能是100或500，最不利的结果是100；若选择不降价，己方的收益可能是-200或300，最不利的情况是-200。

因此，两种策略对应的不利结果分别是100或-200。我们不能控制对方的选择，因此，基于可以控制“在最不利的情形下争取最好的结局”这一理念，取不利结果的最大值100，对应自己的策略选择是选择降价。对称的，对方也是这样选择。最后（降价，降价）成为引例1的博弈均衡解，结果是（100,100）。

站在某个局中人的位置上，由于不能控制其他的策略选择，因此在选择自己的策略时，只能在各种最坏的情况下谋求相对最好的结果。

8. 讨论

重点：培养数学思辨能力和从整体看问题的思维

例题1中从收益矩阵来看，（300,300）对双方来说是最优的结果，为何真实的结局却是（100,100）？什么情况下，可以得到（300,300）的结果？

值得注意的是，在这个博弈中，无论是对两个公司的总体来讲，还是对他们各自来讲，最佳的结果都不是同时降价，得到100，因为都不降价，各得300，明显要比都降价各得100要好。但是在两家公司不合作的基础上，双方都不敢相信对方有合作精神，因此只能实现对他们都不利的结果。这就是经济上的双寡头竞争模型。这个模型也可以解释“价格战”。

个体理性是指个人在分析问题，决定自己行为取向时所表现的理性；集体理性是指集体在决定和从事集体行动时所表现出来的理性，而集体非理性则相反。无论是个人理性、集体理性还是集体非理性，他们强调的是在选择和策略过程中表现的一种思维思考活动。

在引例 1 中，基于各参与人的个体理性，最终导致了次优结果（100,100）的出现，即个体理性导致了集体非理性（困境）。而（300,300）是只有集体理性才有可能达到最优结果。个体理性选择属于非合作博弈，而集体理性选择属于合作博弈。各参与人之间是合作或是竞争关系，博弈的结果会不同。进一步，这样的困境也成为公司并购或者谈判的动力，从而导致合作博弈的结果（300,300）实现。

9. 反思

重点：通过问题的步步加深，培养思维的深度和广度。

来看看我们所熟悉的“囚徒的困境”模型。两个共谋犯罪的人被关入监狱，不能互相沟通情况。如果两个人都不揭发对方，则由于证据不确定，每个人都坐牢一年；若一人揭发，而另一人沉默，则揭发者因为立功而立即获释，沉默者因不合作而入狱十年；若互相揭发，则因证据确实，二者都判刑八年。由于囚徒无法信任对方，因此倾向于互相揭发，而不是同守沉默。最终导致纳什均衡仅落在非合作点上的博弈模型。

在信息不对称的条件下，两个囚徒都各自从在自己的利益出发，衡量利弊、成本与收益，最后都做出了理性的个人选择。而我们从分析中知道，正是因为两个人的个人理性，恰恰导致的集体的非理性，结果是他们都说出了真相。也因此而付出沉重的代价。

现实生活中，因为个人理性导致的集体非理性，其现象是非常普遍的。很多时候，这种情况的发生正是因为太多的个体发生不一致的利益取向所造成的。所以进行有效沟通，控制个人的、多元的、无秩序的选择，在个体中寻找一个均衡的解（即是均衡点），才是最重要的。总而言之，在个人理性和集体非理性的这对矛盾中，必须运用原则来指导无秩序的、多元的个人理性选择，把它规范成有秩序有规律的集体的选择。

10. 结语

核心素养不仅仅是知识技能，更重要的是情感、态度、知识、技能的综合表现。因此我们在运筹学教学中，通过与“纳什均衡解”概念的关联，将数学概念学习变成学生的主动思考和体悟，培养学生的问题解决的能力，提高服务社会、促进个人发展的核心素养。

致谢

本文是武汉市教育局高等学校教学研究项目（2015058）的阶段成果之一。

References

- [1] Lin Congde, Research on the Core Quality of Students' Development in the 21st Century, *Beijing Normal University Press*, pp.29-30, 2018.
- [2] Ma Yunpeng, Several Issues about the core literacy of mathematics, *Curriculum, teaching material and method*, vol.35, 9, pp. 36-39, 2015.
- [3] Xie Shiyu, Game Theory of Economic, *Fudan University Press*, pp.8-68, 2006.