# Inventory Control of Sharing Products Based on Inventory Transshipment

Niannian Li

School of Economics & Management, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, China

**Keywords:** Sharing product, Markov decision process, Products surplus, Inventory transshipment.

**Abstract.** In this paper, based on the traditional inventory theory, the inventory cost function mathematical model is established by considering the inventory level of multiple locations and combining with the non-after-effect of Markov decision-making process. In the process, inventory transshipment (active move, and to balance the inventory level at the time of the passive transfer) to ease the problem of the product surplus and product shortage, and we build a network structure of sharing product to research the solution set of the inventory cost function features at any stage when sharing product surplus and analysis the influence of transshipment price on total inventory level. The thesis is combined with practical application to provide Suggestions for solving the stock problem of Shared products.

# 基于库存转移情形下共享产品的库存控制

李念念

江苏科技大学经济管理学院，江苏镇江，中国

**关键词：** 共享产品；马尔科夫；产品堆积；库存转移

**摘要：** 本文在传统库存理论基础上，结合马尔科夫决策过程的无后效性，考虑了多地点的库存水平，建立了库存成本函数数学模型。在该过程中，利用库存转移（包含产品的主动转移以及为维持库存水平平衡时的被动转移）来缓解产品堆积与产品缺失的问题，并构建了一个共享产品使用网络，研究在任一阶段内，当产品发生堆积时，其库存成本函数的解集特征，分析了转运价格对总库存水平的影响。并将所得命题与实际应用结合起来，为解决共享产品的库存问题提供建议。

## 1．引言

共享产品极大的提高了产品的使用效率，但也离不开基本商品属性，无论是库存的积压，还是库存水平不足，库存都将直接影响到企业自身的利润。已共享单车为例，需要综合考虑用户的出行成本、自行车库存成本、租赁站和自行车道的设施成本，而各个地点的库存水平直接影响消费者的用户体验，库存决策无疑是共享产品急需解决的一个方面[1]。

根据共享产品特性，我们构建了一个共享产品使用网络。在特定区域内，共享产品的总数量为，且分散在几个不同地点。当某地点的库存水平刚好达到平衡时，库存转移成本和缺货损失达到最小。当产品供不应求时，不仅会因为缺货损失而降低企业利润，也会影响消费者对企业的信任；当产品供大于求时，尽管避免了缺货损失，但却降低了产品的使用率。目前也有很多学者对共享产品的库存水平进行了研究。例如，Li J A , Liu K[2]以可以重复使用的空集装箱为研究对象，通过马尔科夫决策过程，对单港口集装箱的库存水平进行研究。并且在建立的数学模型中，得到了一组带有上下限的可行解。Schuijbroek J, Hampshire R C[3-4]介绍了一种使用定价方案改善公共自行车共享系统运行性能的新概念方法。提出了一种公共自行

Copyright © 2019, the Authors. Published by Atlantis Press.
This is an open access article under the CC BY-NC license (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

车稳定运行的数学模型，其方法依据华盛顿特区（美国）Capital Bikeshare项目的自行车需求数据的实验分析，说明了公共产品的研究对社会生活有很大的实际意义。Raviv T , Kolka O [5]介绍了一种适合自行车停靠点管理的库存模型及其数值求解方法。并对模型的凸性进行了结构分析，证明了该方法可用于一个封闭的库存系统。并且由于产品停放的随机性，会导致产品超过停靠点的最大容纳水平，通过库存转移控制库存水平可以缓解该问题。Xiang Li分析了共享经济与共享产品两种模式，并提出了一种马尔可夫决策过程模型，用于研究产品库存水平重新定位。证明了库存水平重新定位也可以发生在多阶段内，且存在最优库存决策。

上述关于库存转运的研究虽然已经很成熟，但基本都是针对单一地点的最优库存决策的探讨。而由于共享产品转移的随机性，传统的库存决策方法并不能解决多个地点的最优问题。而马尔科夫决策过程是一种研究无后效性的随机过程的方法，可用于模拟共享产品库存转移的随机性。在一个复杂动态的系统中，最优决策往往会受到较多因素的限制，难以直接用于解决实际问题。因此本文将以马尔科夫决策过程来描述任一阶段内库存堆积时的成本函数，建立数学模型，讨论产品堆积时的解集特征，缩小解集范围，为解决共享产品的库存问题提供参考。

## 2．模型假设及符号设定

（1）在稳定的共享产品市场环境下，研究任一阶段的共享产品的库存成本。

（2）研究对象为封闭的网状系统，即在没有产品转入或产品转出的情况下，研究产品堆积问题。

（3）假设各个地点实行周期性盘点策略。当区域库存降至一定水平以下，会发生库存转移，且遵循最小成本函数。

（4）类似于$(x_1,x_2,\cdots x_9)$为共享产品分布区域。该集合为闭集，在该集合内，在某一阶段中，在$(x_1,x_2,x_3)$处达到库存转移平衡，在$(x_4,x_5,x_6)$处存在产品堆积，在$(x_7,x_8,x_9)$处产品库存水平不足。以此为基础对发生产品堆积的区域进行研究。

### 2.1 符号设定

$N$:封闭系统内共享产品总数量，$n$:封闭系统内产品放置点的数量，$x_i$:系统转移前，位置$i$的产品数量，$y_i$:系统转移后，位置$i$的产品数量，$\rho$:马氏决策中的折扣因子，$\beta$:单位产品的缺货惩罚，$R^n$:欧几里得几何空间，$R$:库存成本函数，$P$:状态转移概率矩阵。

## 3．模型构建

马尔科夫决策过程是一个多元组，其中元素表示为：$(S,A,R,P,\rho)$在不同地点的库存水平$x_i$构成一个集合，可表示为状态空间$S$，当发生库存转移后，不同地点库存水平为$y_i$，可表示为行为空间$A$。

$$S=\left\{(x_1,x_2\cdots x_n):\sum_{i=1}^{n}x_i\le N,x_1,x_2\cdots x_n\ge 0\right\}\quad A=\left\{(y_1,y_2\ldots y_n):\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_i,y_1,y_2\ldots y_n\ge 0\right\}\tag{1}$$

将时间设置为$T$，定期观察各个点的库存水平。不同地点之间的库存转移，这个过程可以是主动的，并在此期间产生转移成本，也可以是顾客根据自身需求转移的，来减缓产品库存的堆积与缺货损失。如在位置1，其转移未发生之前，其状态可表示为$x_{t,1}$，当有$n$个地点，其库存水平的向量可表示为$x_t=(x_{t,1},x_{t,2},x_{t,3}\cdots x_{t,n})$。发生库存转移后，库存状态可表示为$y_{t,1}$。其库存水平向量可表示为$y_t=(y_{t,1},y_{t,2},y_{t,3}\cdots y_{t,n})$。从位置$i$转移至位置$j$，库存成本

可表示为$c_{ij}$，$c=(c_{i,j})$表示一组成本向量, 转移数量可表示为$z_{ij}$我们可以得到各个位置之间的库存转移模型可以表示为：

$$\begin{aligned}&\min\{(c_1)^T z_{12}+(c_2)^T z_{21}+(c_3)^T z_{31}+\cdots(c_n)^T z_{ij}\}\\&\sum_{i=1}^{n} z_{1i}-\sum_{k=1}^{n} z_{k1}=y_1-x_1\\&\vdots\\&\sum_{i=1}^{n} z_{(i-1)i}-\sum_{k=1}^{n} z_{k(k-1)}=y_n-x_n\\&z_{12,}\cdots z_{ij}\geq 0\end{aligned}\tag{2}$$

由（2）可知，该问题为大规模的线性规划问题，直接求解问题难度大，并且对算法有很高的要求，但该问题有特殊的结构，即$c_n, x_n, y_n$的维数相同，$z_{ij}$与约束条件的列数相同，$y_n-x_n$与约束条件的行数相同。所以可将其分解为多个小规模的问题求解，即将其分成各个相互独立的$n$组。将原问题简化为主问题，在任意位置$j$，从库存水平$x_i$到库存水平$y_i$库存转移产生的最小库存成本，可表示为：

$$\begin{aligned}&\min_{z=(z_{i,j})} c^T z\\&\sum_{i=1}^{n} z_{ij}-\sum_{k=1}^{n} z_{jk}=y_j-x_j\\&z\geq 0\end{aligned}\tag{3}$$

$c^T z$表示两向量内积，并且转移产品数量为正值。在讨论得到最优结论之前，必须要说明$c(\cdot)$的性质，通过（3）可以得知$c(\cdot)$的定义域，表示为：

$$dom(c)=\{w: w=y-x, x\in S, y\in A\}\tag{4}$$

在（3）中$w$可以视为两组向量进行线性交换。基于（3）可以得到一个$c(\cdot)$对偶的线性规划：在任意位置$i, j$上满足

$$\begin{aligned}&C(w)=\max_{b=(b_1,b_2,\cdots,bn)} b^T w\\&b_j-b_i\leq c_{ij}\end{aligned}\tag{5}$$

由（5）可知库存转移产生的成本函数是凸函数，并且正齐次。

命题1 在（5）中存在最优决库存转移数量$z$，使库存成本最小，即在任意位置$j$上满足，$\sum_{i=1}^{n} z_{i,j}=(y_j-x_j)^+$和$\sum_{k=1}^{n} z_{j,k}=(y_j-x_j)^-$。

证明：在固定区域内，将位置$i$的产品转移到位置$j$，在位置$j$也会将一定数量产品转移至位置$k$。当$i=k$时，表明产品的转进与转出都发生在位置$j$，令$z_{i,j}=0$或$z_{j,i}=0$，仅需一次转运，位置$i$产品数量可以达到平衡，且满足条件约束。当$i\neq k$，位置$i$与$k$均需要发生库存转移，此时仅仅考虑$i, j, k$三个位置，且$z_{i,j}-z_{j,k}\geq 0$，在约束$z_{i,j}-z_{j,k}=y_j-x_j$中，令

$z_{j,k}=0$，即无需从位置 $j$ 转移产品到位置 $k$，也可以使产品数达到平衡。由此可知，在位置 $i,j,k$ 满足 $z_{i,j}\cdot z_{j,k}=0$ 时，即满足 $\sum_{i=1}^{n}z_{i,j}=(y_j-x_j)^+\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{k=1}^{n}z_{j,k}=(y_j-x_j)^-$ 存在最优决策。

由命题1可知，主问题存在基本最优解，则原问题亦存在基本最优解。在共享产品的库存相互转移过程中，是可以找到一组最优库存转移量 $z_{ij}^*$ 的，在实际生活中，对共享产品的研究，最终的决策也必须是具体到单个的区域。

库存理论中，缺货损失是库存成本中的重要组成部分，因为共享产品覆盖范围较大，供需关系复杂。当需求大于其库存水平时，即 $d_{t,i}>y_{t,i}$，此时存在产品缺失，相反则会造成产品堆积。假设缺货损失往往要大于转移成本，否则没有必要进行库存转运，即在 $\beta\geq c_{ij}$ 的情况下，可以得到产品缺货损失函数：

$$L(y_{t,i},d_{t,i})=\beta\sum_{i=1}^{n}(y_{t,i}-d_{t,i})^+ \tag{6}$$

在共享产品的库存转移过程中，一个地点向另一个地点进行库存转移，仅仅与其发生库存转移的地点有关系，即马尔科夫决策过程中的无后效性，$x_t$ 仅仅与 $x_{t+1}$ 存在关系。由于状态空间与动作空间的设定，$x_{t+1}$ 与 $(y_t,d_t,p_t)$ 存在函数关系，可以表示为：

$$x_{t+1}=(y_t-d_t)^++(N-\sum_{i=1}^{n}(y_{t,i}-d_{t,i})^+) \tag{7}$$

由于需求与转移概率相互独立，用 $\mu_t$ 表示一组随机数列 $(d_t,p_t)$，基于此我们可以得到，整个过程的缺货损失期望:

$$l_t(y)=\int\beta\sum_{i=1}^{n}(y_{t,i}-d_{t,i})^+d(\mu_t) \tag{8}$$

在产品总量为 $N$ 的区域内，当发生库存转移时，可将该区域分为三个部分，即库存达到平衡与发生产品堆积，产品数量不能满足需求。库存成本可表示为：

$$r_t(x_t)=C(y-x)+\beta\int\sum_{i=1}^{n}(y_{t,i}-d_{t,i})^+d(\mu_t)+\rho\int r_t[(y_t-d_t)^+(N-\sum_{i=1}^{n}(y_{t,i}-d_{t,i})^+)p]d(\mu_t) \tag{9}$$

在该区域的总库存水平不发生改变，即没有因为产品缺少向该区域内转入，没有由产品堆积向区域外转出。当发生产品堆积时：

$$r_t(x_t)=l_t(y)+\min_{y\in A}C(y-x)+\rho\int r_{t-1}(x_{t-1})d(\mu_t) \tag{10}$$

由（9）与（10)可知：

$$H_t(y_t,d_t,p_t)=\rho r_t[(y_t-d_t)^++(N-\sum_{i=1}^{n}(y_{t-1,i}-d_{t-1,i})^+)p \tag{11}$$

$$h_t(y_t)=\int H_t(y_t,d_t,p_t)d(\mu_t)=\rho\int r_{t-1}(x_{t-1})d(\mu_t) \tag{12}$$

当共享产品库存转移数量平衡时可以等价为约束库存转移成本与缺货损失成本最小。当发生产品堆积，缺货损失可以视为0。在任一阶段内：

$$R(x)=\min_{y\in A}C(y-x)+h(y) \tag{13}$$

命题2 发生库存堆积时，若库存水平不变时，$x$ 为定值，在周期$T$ 内，且$0 \le x \le N$，$R(x)$ 单调递增。

证明：已知$r_0(x) \equiv 0$，且$l_t(y) = 0$ $r_1(x) = \min(c(y-x)) \ge r_0(x) = 0$，假设$r_t(x) \ge r_{t-1}(x)$。

$$r_{t+1}(x) = \min\{c(y-x) + \rho \int r_t[(y-d)^+ + (N - \sum_{i=1}^{n}(y-d)^+)p]d(\mu_t)$$

$$\ge \min\{c(y-x) + \rho \int r_{t-1}[(y-d)^+ + (N - \sum_{i=1}^{n}(y-d)^+)p]d(\mu_t) = r_t(x)$$

可知$r_{t+1}(x) \ge r_t(x)$

由该命题可知，当总库存水平不变时，在共享产品发生产品堆积的区域，其库存成本会随着堆积时间的增长而增大。但依靠共享产品的被动转移，只会增加时间周期增加库存成本。在区域内共享产品发生库存转移，发生产品堆积的地点是有可以通过一定规律发现的，并且这些这点组成一个非空且有界的集合。所以研究其分布特征，再采取适当措施，降低其带来的影响是非常重要的。

命题3 若$h(\cdot)$可微，当满足（14）时，$x \in \theta_h(I)$其中$x \in S$。

$$\frac{dh(x)}{dx_i} - \frac{dh(x)}{dx_j} \le c_{ij} \tag{14}$$

证明：若$x \in \theta_h(I)$，且$\exists y \in A_I$，满足$h(x) \le C(y-x) + h(y)$若$h(x)$可微，其次微分表示为$\partial h(x)$。取$\eta \in \partial h(x)$，又由次梯度不等式，$h(y) - h(x) \ge \eta^T(y-x)$。可得$\eta^T(y-x) < -C(y-x)$。从定理1可知，存在最优库存转移数量$z_{ij}$满足：

$$C(y-x) = \sum_i \sum_j c_{ij} z_{ij}, \quad -\eta^T(y-x) = \sum_i \eta_i (y_i - x_i)^- - \sum_j \eta_i (y_i - x_i)^+$$

由此可知$\eta_i - \eta_j \le c_{ij}$，在任意位置$i, j$上，设集合$M = \{(m_{1,} m_{2,} m_{3,} \cdots m_n) : m_i - m_j \le c_{ij}\}$由此可知，$\eta \in M$，得到$\theta_h(I) \cap M \ne \varnothing$。又因为该次微分为：

$$\partial h(x) = (\frac{dh(x)}{dx_1}, \frac{dh(x)}{dx_2}, \frac{dh(x)}{dx_3} \cdots \frac{dh(x)}{dx_n}) \tag{15}$$

所以在任意位置$i, j$上满足（15）。结合命题4，可以产生一个新的随机规划（20）确定解集。

$$\min\{h(x) : x \in D\}$$

$$D = \{x \in R^n : \sum_{i,j=1}^{n} [\frac{dh(x)}{dx_i} - \frac{dh(x)}{dx_j}] \le c_{ij}\} \tag{16}$$

直接计算出每个点的$h(x)$与$h(x)$在$x$处的梯度，涉及到了多重积分与各个子问题的优化问题，为解决该问题，可以提供一种解决思路，即使用近似函数来代替目标函数，其迭代方法与SQP型算法类似。

从上述内容可以看到，若$h(x)$可微，且找到其特征关系，则可以判断出该点是否位于集合上。虽然仅仅在单一阶段内进行研究，但仍可以为共享产品的库存决策提供建议。通过计算，可以提前缩小产品发生堆积的区域范围，使产品库存水平可以达到平衡，帮助企业提前进行调控，降低成本。

## 4．数值分析

为了更加清楚命题的实际应用，可以举出一个实例。当$h(y)$可微时，由（16）可知，若在三个地方发生库存转移后，在单阶段，忽略下标时间$t$，库存水平分别为$y_1, y_2, y_3$，假设$h(y)=0.3y_1^2+0.2y_2^2+0.1y_3^3$，转移价格$c_{ij}=0.8$。由定理4，当满足：

$$-0.8\le\frac{dh(y)}{dy_1}-\frac{dh(y)}{dy_2}\le 0.8,\quad -0.8\le\frac{dh(y)}{dy_2}-\frac{dh(y)}{dy_3}\le 0.8,\quad -0.8\le\frac{dh(y)}{dy_1}-\frac{dh(y)}{dy_3}\le 0.8$$

$$\theta_h(I)=\{y\in A_I:-0.8\le 0.6y_1-0.4y_2\le 0.8,-0.8\le 0.4y_2-0.3y_3^2\le 0.8,-0.8\le 0.9y_1+0.3y_3^2\le 0.8\}$$

其中$I=y_1+y_2+y_3=30$，满足该条件的集合可用图1表示：

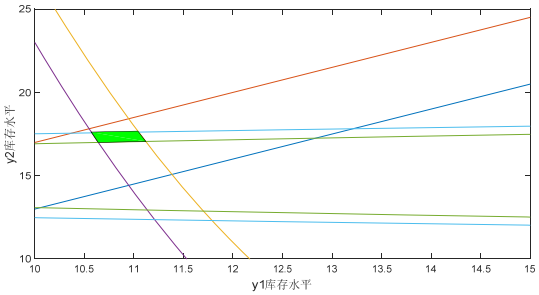


图1 不同地点与总库存水平$I$关系

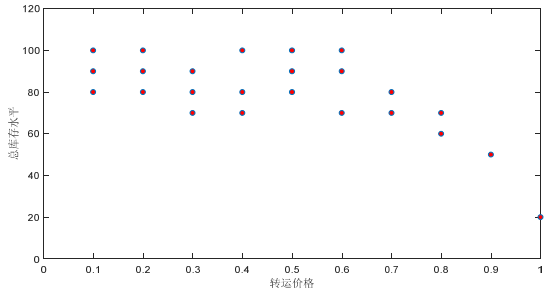


图2 库存转运价格$c_{ij}$与总库存水平$I$关系

由图1此可知，该方法可以有效缩小产品堆积时$\theta_h(I)$的范围。假设库存转移后，$h(y)=0.01y_1^2+0.01y_2^2+0.01y_3^2$，若将转移价格定义为：$c_{ij}=\{c_1\cdots c_n:0.1\le c\le 1, n=10\}$，根据定理3，库存水平以10为单位，若存在解集，得到库存转移价格与总库存水平关系，如图2所示。从图2可以推测随着总库存水平的增大，要减小转运价格，才能保证构建的共享产品库存转移网络模型存在确定的解集。这与实际生活中存在的问题也是符合的，即在一个封闭系统中，转运的数量越大，降低转运成本，可以增加系统的稳定性，库存水平越大，影响效果越显著。

## 5．结束语

本文研究任一阶段时多地点的库存成本函数，当封闭系统因为需要向内转入产品或者向外转出产品时，此时系统转变为开放系统，也从单一阶段转变为多阶段，这也是共享产品现存的实际问题。从本文中可知，在封闭的系统中，产品堆积是可以存在的。在总库存恒定的情况下可以通过模型解集的特征来确定范围。在单阶段问题的基础之上，产生产品堆积时，可以提前确定其位置特征，做出决策。但当系统变为开放系统时，发生产品堆积的地点还能否通过库存转移维持系统运行，找到库存堆积时其解集的相应特征是一个值得研究的方向。

## References

[1] Lin J R , Yang T H , Chang Y C . A hub location inventory model for bicycle sharing system design: Formulation and solution[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 65(1):77-86.

[2] Li J A , Liu K , Leung S C H , et al. Empty container management in a port with long-run average criterion[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 40(1-2):85-100.

[3] Ji X, Sun J, Wang Z. Turn bad into good: Using transshipment-before-buyback for disruptions of stochastic demand ☆[J]. International Journal of Production Economics, 2017, 185:150-161.

[4] Schuijbroek J, Hampshire R C, Hoeve W J V. Inventory Rebalancing and Vehicle Routing in Bike Sharing Systems[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 257(3):992-1004.

[5] Raviv T , Kolka O . Optimal inventory management of a bike-sharing station[J]. IIE Transactions, 2013, 45(10):1077-1093.

[6] Dell'Amico M, Hadjicostantinou E, Iori M, et al. The bike sharing rebalancing problem: Mathematical formulations and benchmark instances[J]. Omega, 2014, 45(2):7-19.

[7] Lee C, Park K S. Inventory and transshipment decisions in the rationing game under capacity uncertainty ☆[J]. Omega, 2016, 65:82-97.

[8] Olsson F. An inventory model with unidirectional lateral transshipments[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 200(3):725-732.

[9] Contardo C, Rousseau L, Morency C. Balancing a dynamic public bike-sharing system[J]. 2012.