

# On the Design and Implementation of Higher Mathematics Problem Teaching

Zhang Kangming<sup>1,a</sup>, Wang Jian<sup>1,b</sup>, Xu Zongwen<sup>1,c</sup>, Xie Huangang<sup>1,d</sup>

<sup>1</sup>The Army Infantry Academy of PLA, Nanchang, Jiangxi, China

<sup>a</sup>\* zkmnc@163.com

<sup>b</sup> wjhxxh@163.com

<sup>c</sup> zwaxsf@163.com

<sup>d</sup> 8890wsx@163.com

## ABSTRACT

Based on the analysis of the shortcomings of traditional teaching methods of higher mathematics, this paper expounds the significance of problem-based teaching, and makes in-depth thinking and research on the design principles, contents and implementation of higher mathematics problem-based teaching, which will provide useful reference for promoting the reform of higher mathematics teaching and improving the quality of personnel training.

**Keywords:** Higher mathematics, problem teaching, teaching design

## 高等数学问题教学设计与实施的思考

张康明<sup>1, a\*</sup>, 王剑<sup>1, b</sup>, 许宗文<sup>1, c</sup>, 谢焕钢<sup>1, d</sup>

<sup>1</sup>陆军步兵学院, 南昌, 江西, 中国

<sup>a</sup>\* zkmnc@163.com

<sup>b</sup> wjhxxh@163.com

<sup>c</sup> zwaxsf@163.com

<sup>d</sup> 8890wsx@163.com

## 摘要

本文在分析传统高等数学教学方法的不足基础上阐述了问题教学的意义, 并对高等数学问题教学的设计原则与内容及实施环节进行了深入思考和研究, 这将为促进高等数学教学改革和提高人才培养质量提供有益参考。

**关键词:** 高等数学, 问题教学, 教学设计

## 1. 引言

高等数学是大学理工类专业的必修课程, 是后续课程的理论基础, 对培养学生的抽象思维、逻辑推理能力空间想象能力及解决实际问题能力具有重要作用。但由于传统的高等数学教学方法, 采取演绎式、注入式、满堂灌方式, 教师处于主体地位, 学生处于被动地位, 造成学生参与课堂问题讨论分析程度不够, 这种教学模式难以培养学生的数学思维能力和数学素养, 因此有必要进一步对高等数学的传统教学方法进行分析并探讨引进问题教学法的意义。

传统的教学方法难以达成教学目标的原因有很多, 对高等数学课程特点研究不够、教学内容处理不当、教学对象的学习方法缺乏指导是其中三个重要原因。在课程特点方面, 高等数学课程与初等数学相比在抽象性、

逻辑性、应用性方面的特点更加显著了, 这对培养学生数学的抽象思维能力、逻辑推理能力及解决实际问题的能力有极大帮助, 但这些能力的培养都需要经历精心设计的教学活动过程才能实现。传统的教学方法按照演绎式方法来讲授, 着重知识结果性目标达成, 轻视过程性目标的实现, 抽象性和逻辑性特点成为部分学生学好该课程的拦路虎, 降低学生学习的兴趣, 从而难以达到理想的教学目标。对高等数学教学内容的处理不当是传统教学法难以达成教学目标的重要因素。传统高等数学教学法把教材内容等同于教学内容, 教师往往以照本宣科方式进行教学, 对教材内容缺乏二次创造, 对教材内容的研究深度与广度不够。高等数学是大学一年级学生的学习课程, 学生高中数学的学习方法难以适应大学高等数学的学习要求。在学习方法方面, 高中数学课程学习内容少, 时间多, 练习多, 在课堂上以教师讲授为主, 学生处于被动接受地位[1], 课后答疑辅导时间较多。而

在大学高等数学课程内容多, 时间少, 练习少。如果仍采用高中学习方法, 学生难以学好高等数学。

问题教学克服了传统教学方法的不足, 根据学科和学生特点, 将教学内容问题化, 以问题为核心的教学设计, 对高等数学教学内容进行再设计, 在教学中不仅让学生掌握基础知识, 还能够在分析问题和解决问题之中掌握数学的思想方法和提高数学思维能力, 让学生敢思考, 敢质疑, 充分调动学生的积极性、主动性和创造性[2], 把冰冷的内容变成火热的思考问题, 进一步点燃课堂思考的火花, 激活课堂思考研讨氛围, 从而提高高等数学课堂教学效率。

## 2. 高等数学问题教学设计原则

问题教学设计的重点和关键是问题设计[3], 好的问题设计应依据数学学科的特点、教学对象的特点, 遵照以下设计原则。

一是采取具体与抽象, 特殊与一般相结合的原则。高等数学的概念、性质、定理一般都以符号形式化表示, 加上教材内容以演绎学术形态给出, 学生往往不容易接受和深入理解。为此教师需要对教材的学术形态进行处理, 把其转化成教学形态, 达到深入浅出的目的。抽象的内容可以通过具体的实例来引入和理解, 一般的结论可以通过特殊情况来说明, 让学生经历发现、归纳、猜测等合情推理来加深逻辑推理的理解。例如在极限概念教学时, 对数列极限概念的引入可采用求特殊圆的面积和特殊数列的变化趋势的具体例子, 在抽象其共同数量特征基础上引出数列极限概念, 然后再回到具体引例, 以极限概念描述引例问题, 这样经过具体与抽象的反复过程可以逐步培养学生的抽象思维能力。

二是采取已知与未知, 联想与类比相结合的原则。高等数学问题的提出可以从学生已知的内容出发, 引出新的未知内容, 通过问题分析把未知的问题转化为已知的问题, 由已知的问题又可提出新的问题, 让学生在问题提出与分析中体会数学转化思想, 这样的问题教学设计符合学生的学习认知规律。联想与类比是高等数学重要的思想方法, 是问题教学需要遵循的原则之一。例如在多元函数微积分教学时, 在整体可以采取先回顾一元函数微积分对应的内容, 再通过联想与类比方式引出或猜测对应的概念或结论, 这有利于提高学生学习和学习效率。

三是采取思维过程与知识提炼相结合的原则。高等数学教学本质就是数学思维的过程, 在概念、原理、例题、习题的教学中应采用不同方法来体现其思维过程, 以达到满意的教学效果。如在定积分概念教学中, 通过曲边梯形的面积和变速直线运动的路程问题的分析, 在分析其解决问题的步骤和思想方法的基础上, 逐步归纳出定积分的概念和本质, 形成定积分的完整定义, 这种从具体的实例抽象到一般性定义的过程, 既有利于锻炼学生的抽象思维能力, 也有利于学生理解概念的知识的形成过程。

## 3. 高等数学问题教学设计内容

高等数学问题教学设计内容与一般教学方法的相同, 主要包括教学目标、教学对象分析、教学内容、教学策略等内容。与一般教学方法不同的是, 高等数学问题教学设计更加注重问题设计, 问题是高等数学问题教学的灵魂, 一个经过精心设计的问题不仅能够达成教员的教学任务, 还能激发学生自主学习 and 发现问题、分析问题、解决问题的能力。

教学目标是高等数学教与学的起点和终点, 在设计时应注意教学目标的全面性及实现过程, 不仅包括结果性目标, 还包括过程性目标, 具体包括知识与技能、过程与方法、情感价值观目标, 使学生不仅获得高等数学的基本知识, 更获得数学思想和数学精神的培养, 达到数学文化育人的目的[4]。教学目标可以分为课程教学目标、单元教学目标及章节教学目标, 其中课程教学目标和单元教学目标是宏观指导性, 而章节教学目标是具体化的, 是依据课程教学目标和单元教学目标来制定的。高等数学教学大纲对教学目标有总体指导要求, 这是进行问题教学设计的主要依据之一, 在进行问题教学设计时应全面理解和掌握。在知识与技能方面教学大纲提出了掌握“三个基本”和“一项技能”的总要求, 要求学生掌握高等数学的基本概念、理论、方法及其运算技能。在过程与方法方面教学大纲提出了培养能力的总要求, 要求培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力及数学应用能力。

教学对象分析是高等数学问题教学设计的重要一环, 在设计时应注意分析教学对象的现有基础、学习兴趣与专业需求、学习思维习惯, 并预计达到教学目标的可能困难。这种困难的消除需要贯穿整个教学过程, 通过具体的教学活动把学生从现有的水平提高到教学要求的目标。掌握教学对象的现有基础情况, 有利于学生更容易接受新的教学内容。一般而言, 现有基础包括与教学目标对应的部分的基础, 即知识与技能、过程与方法、情感价值观三方面的基础。问题教学设计中应注意通过分析教学内容的前后关系, 列出相关联的基础, 以复习回忆已有基础的方式引入新问题, 这样就从学生的已知出发不断引导学生探究新或未知问题。掌握教学对象的学习兴趣与专业需求情况, 有利于提高学生的学习兴趣。现行的高等数学教材的问题一般来源于经典的物理和几何问题, 强调的是共同基础作用, 而对教学对象的学习兴趣和专业需求考虑不足, 这对提高学生学习兴趣和后续专业学习不利。高等问题教学设计不仅要考虑学生的现有基础, 让学生容易接受和入门, 更要考虑学生以后的专业发展需要, 为学生专业发展奠定基础。

掌握教学对象的思维习惯, 有利于培养学生的数学思维能力。高等数学课程一般在大学一年级开设, 一年级的大学大都习惯高中的具体和归纳思维方式, 不太适应抽象和演绎的思维方式。高等数学问题教学设计应注意处理具体与抽象、归纳与演绎的相互关系, 通过问题教学的各环节培养学生的数学思维能力。

教学内容分析包括教学内容结构、重难点及时间安排等部分内容, 是实现教学目标的具体载体。高等数学

的教学内容结构按范围大小可以分为课程、章、节的内容结构。在进行教学内容设计时需要考虑它们之间的相互关系，这样才能从整体上把握教学内容的内在关系，做到内容处理得当，前后衔接自然。下面以函数与极限为例进行教学结构分析。高等数学课程依次设置了函数、极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、无穷级数八大专题的教学内容。其中函数与极限主要介绍高等数学研究对象及其研究方法，是整个高等数学的出发点和理论基础。函数是高等数学的研究对象，初等函数是其主要的研究对象，其概念贯穿整个高等数学的内容。有了这个以上认识，高等数学就可以依据初等函数的概念和极限展开对应内容的教学设计。如在导数的计算问题教学时，教师就有一条清晰的思路，按照基本初等函数的求导、导数的四则运算法则、复合函数求导法则依次展开，之所以按照此思路，原因是主要研究对象的定义确定的。极限方法是研究函数的基本方法，极限理论与方法贯穿整个高等数学。一方面高等数学许多概念都建立在极限概念基础上，本质上是一种特殊的极限。如一元函数的连续性概念是一种函数极限值等于函数值的特殊极限，一元函数的导数概念是一种函数增量与自变量增量比的极限的特殊极限，定积分概念是一种函数特殊的和式极限等等。另一方面高等数学许多性质定理都建立极限理论与方法基础上，本质上是一种特殊的极限的对应性质定理。如一元函数的连续、导数、定积分等都有与极限运算性质对应部分等等。同理可以对函数与极限的每一节教学内容进行章节结构分析。在进行结构分析时可以借鉴合适的分析理论及工具如概念图、知识网络、复杂网络等进行。在教学内容结构分析的基础上，结合教学目标和教学对象分析可以确定教学的重难点问题。教学重点一般在教学内容结构中占有重要的地位和作用，起到关键性的承上启下作用，是学生必须掌握的教学内容。教学难点是指从学生现有基础出发难以达到教学目标的教学内容。为了在有限时间内达到理想的教学效果，需要对教学时间进行科学合理的安排，保证教学重难点有充足时间。

教学策略是为了达到教学目标而采取有针对性的教学方法手段、组织形式和步骤。教学手段是教师和学生之间交流信息的工具、媒体或设备，可分为传统教学手段和现代教学手段。传统教学手段包含课本、黑板和粉笔，现代教学手段包含幻灯机、投影仪和计算机等各种电化设备和教材。教学手段设计要根据教学目标的要求、教学对象的实际及教学内容的需要，采用适合于内容的教学手段，做到传统与现代的结合，发挥课件与板书的各自优势，其目的在于提高教学质量，提升教学效率。数学课件在图形、声音、信息量方面有独特优势，黑板板书在问题提出、问题分析、问题解决的分析过程和基本知识的提炼过程具有独特的演示作用，能较好地体现数学的思维过程，因此对重要的问题、概念、性质、定理、例题的分析过程在黑板上应有体现。教学组织形式和步骤一般采用教学内容的先后顺序、教师的活动顺序、学生的活动顺序交替进行，常以内容为主线，活动

为辅线。高等数学教学一般采用回顾已知、引出未知、提出问题、形成概念或方法、练习应用等步骤进行。回顾已知是教师的引导下以问题形式引入实例或回忆与本节课相关的知识，从中引出需要讨论的未知问题，在教师 and 学生的共同探究下，形成高等数学的基本知识和培养学生的数学思维能力。

#### 4. 高等数学问题教学的实施

问题教学的实施要按照“问题牵引、学为主体、教员主导”的本质要求，以“提出问题、分析问题、解决问题、小结提高”为主线展开教学，体现数学思维具体过程和概念、定理、方法的形成过程，达到教学的全面要求。

问题是数学心脏。问题提出是问题教学的第一步，需要做到有“趣”的标准。高等数学问题提出一般可从三个方面考虑。一是从高等数学历史发展角度提出研究问题。如从微积分需要解决的四类问题：平面曲线的问题和物体变速直线运动的即时速度问题、函数的最值问题、曲线长度、曲线围成的面积、曲面围成的体积，提出相关高等数学的问题。二是从高等数学内容的内在结构规律提出研究问题。如从高等数学的主要研究对象——初等函数出发，由于初等函数由基本初等函数经过有限次运算（四则运算和复合运算）而成，这样高等数学的内容自然而然就要研究这些函数对应的性质。三是从教学对象的身边实例及发展需要提出问题。如从讲解极限概念可以从银行连续复利提出问题，讲解不定积分概念时可以从兰切斯特作战模型提出问题。对应问题提出角度，高等数学常见教学问题类型可以划分为三类。第一类是高等数学概念型问题，如极限、导数、不定积分、定积分等概念问题[5]。第二类是高等数学性质方法型问题，如极限、导数、不定积分、定积分等计算方法型问题。第三类是高等数学应用型问题，如导数、定积分等的应用问题[6]。

数学是思维的体操。分析问题过程是利用数学思维分析问题的过程，需要做到有“味”标准。这个过程中要发挥教师的主导作用和学生的主体作用，教师在引导学生分析问题时要做到思路清晰，组织学生按问题的逻辑顺序展开探讨，提出教学主问题及为此研究需要研究的基本知识点，突出数学思维过程和知识的形成过程。对应高等数学不同教学问题类型，其分析方法也不尽相同。对概念型问题来说，一般经过引例建立数量关系的模型，尔后由该模型的数量关系结构的共同特征推广至一般问题，从而给出该模型的相关定义，其数学思维过程经过具体到抽象、特殊到一般的反复过程。教师在引例到模型建立和模型特征的分析上要留给学生充分思考时间，体会概念知识的归纳提炼过程及符号形式化过程。对方法型问题来说，高等数学一般可分为概念到方法、方法到方法的两种形式。从概念到方法的形式需要分析直接利用概念解决问题的不足或困难，尔后在进一步提出研究方法的必要性。从方法到方法的形式需要设置相关特例进行分析，指出利用已有方法的困难，进而

经过归纳猜测等合情推理方法得出待证的新方法，尔后逻辑推理分析该方法的可行性和正确性，最后归纳形成结论。对应用型问题来说，其分析过程与概念或方法型分析过程类似，如导数的应用分析过程与方法型分析过程类似，定积分的应用分析过程与概念型分析类似。

解决问题是问题教学的重要目标，提出问题和分析问题的目的在于解决问题，需要做到有“用”的标准。这个过程中在分析问题的基础上解决前面提出的问题，这些问题可以分为特殊问题和一般性问题。对于特殊问题，我们可以在分析过程中把其转化为某种数学问题，从而通过具体的计算或证明解决。而在问题教学中，关注更多的是特殊问题的一般化问题，这样才体现数学应用的广泛性和其研究的价值。例如在导数概念教学时，通过对曲线切线问题和变速直线运动即时速度问题分析，得到特殊数量结构的极限计算问题，一方面可以把其计算问题归结为一般性导数计算问题，另一方面可以通过引例的具体计算解决其计算问题，这样既可以解决特殊问题，也可以引出对一般函数导数的计算问题。

小结提高是对分析问题和解决问题过程中涉及的重要的知识和思想方法进行归纳小结，需要做到有“美”的标准。在这个过程中教师要引导学生归纳小结概念性质定理，让学生体会数学描述问题的简洁美、对称美，通过练习和实践加强对概念本质理解和方法要点的掌握，以便于学生对教学内容能够系统理解和有效应用。例如在导数概念教学时，可以在问题提出、问题分析和问题解决的基础上对涉及的概念进行概况小结，把两类不同背景问题归结为统一的导数计算问题，让学生体会数学的简洁性和抽象性，进一步揭示导数概念的数学本质为函数的增量与自变量增量比的极限问题或函数变化率问题，在此基础上说明导数计算的方法步骤，通过解决基本初等函数的导数计算练习达到巩固提高的目的，这为解决初等函数的导数计算问题奠定基础。

## REFERENCES

- [1] Wang,L.D., Zhang C.F., Chen D.H., Zhang W.Y.,(2019) Cultivation of creative thinking in higher mathematics teaching: problems and countermeasures, *Journal of Mathematicas Education*,28:81-84.
- [2] Yuan,Y.,(2015)An exploration of problem-driven teaching mode in advanced mathematics. *Education and Teaching Research*, 29: 82-85.
- [3] Xiao,W.S,(2003)On "problems" in problem -based Teaching. *College mathematics*,19: 82-85.
- [4] Li,D.Q., (2009) On the objectives and methods of College Mathematics Teaching. *Chinese University Mathematics*, 1: 7-10.
- [5] Zhang,K.M., (2013) The exploration and thinking of derivative concept teaching. *Examination Weekly*,14:14-16.
- [6] Yang,S.G., (2014) Teaching application problems in higher mathematics. *Studies College Mathematics*,17: 119-122.