Research on Case Teaching of Numerical Solution of Nonlinear Equation
Take the Calculation Fluid Friction Coefficient as an Example

Jingyuan Zhang, Minghui Wang*

Qingdao University of Science and Technology, Qingdao, China
Corresponding author. Email: mhwang@qust.edu.cn

ABSTRACT
Taking the calculation of fluid friction coefficient as an example, this paper analyzes the case teaching of numerical solution of nonlinear equations, and points out that the theory should not be ignored in case teaching, and the effectiveness and operability of numerical method in solving practical problems should be taught comprehensively, and the application should be carried out in combination with the characteristics of practical problems. This paper focuses on the combination of the fixed point iterative method, Newton iterative method and the solving tool provided by MATLAB and the calculation case of fluid friction coefficient, and intersperses with the discussion of stability and the selection of initial value. So that students can deeply understand the mathematical theory and solve practical problems efficiently.

Keywords: *Numerical solution of nonlinear equation, Research on case teaching, Calculation of fluid friction coefficient.*

非线性方程数值解法案例教学研究
——以流体摩阻系数计算为例

张静源，王明辉*

青岛科技大学数理学院,青岛,中国
通讯作者. 邮箱：mhwang@qust.edu.cn

中文摘要
本文以流体摩阻系数计算为例，具体分析非线性方程数值解法的案例教学，指出案例教学不应忽略理论知识，应全面讲授求解实际问题时数值方法的有效性和可操作性，并结合实际问题的特点进行应用。本文着重讲解不动点迭代法、牛顿迭代法以及 MATLAB 提供的求解工具与流体摩阻系数计算案例的结合，并在其中穿插关于稳定性的讨论及初值的选择等问题，从而使学生深刻理解数学理论，高效解决实际问题。
关键词：*非线性方程数值解法；案例教学；流体摩阻系数计算*

1. 引言

非线性方程在工程实践中用途广泛，非线性方程数值解法是《数值分析》[1]课程教学的重点内容。目前《数值分析》教材主要包括定义、定理、证明、举例，内容偏重理论，但由于非线性方程与实际应用联系紧密，仅仅从理论讲解其数值解法显然是不够的。随着近年来案例教学的迅速发展和多方应用，建立优秀高质的案例库，对于提高《数值分析》课程的教学质量，尤其是非线性方程数值解法部分的教学有着重要作用。

案例教学[2-3]是一种动态开放的教学模式，最早应用于哈佛商学院的工商管理教学。案例教学以"问题"为中心，重视具体问题具体分析，针对性和灵活性较强，目的是让学生掌握分析、解决问题的方法，培养学生的思维分析和判断力，有利于提升学生运用理论解决实际问题的能力，具有传统教学法无可比拟的优势。由于实际案例在其所在领域已有较多研究成果，在教学时可以指导学生结合这些成果使用数值方法，使得学生迅速熟悉陌生的研究领域，并高效的解决问题。

同时我们也应该意识到，案例教学不应忽略理论知识，要在全面了解与掌握理论知识的基础上，结合实际问题的特点进行应用。若未能深入了解理论方法的特点或单纯追求解题的高效，便盲目使用某方法并不会得到理想的结果。在非线性方程数值解法的案例教学中，通常指导学生分析问题，整理出非线性方程后，直接用牛顿迭代法进行求解。这是由于牛顿迭代法在非线性方程为单根的情形下，具有二阶收敛速度，能够迅速求解问题。但不能忽略的是，在理论教学时，我们证明了牛顿迭代法作为一种不动点迭代的方法是局部收敛的，这种方法的有效性是依赖于初值的，盲目地选择初值往往会出现结果发散的恶劣情况。与此类似的，MATLAB 中也提供了像 fzero 函数这样求解非线性方程的快速数值方法，但该方法也会出现选择某些初值造成发散的情况。

因此，在非线性方程数值解法案例分析中应跟学生强调，在选择求解函数方程的数值方法时，应了解各种方法的特点和基本理论，验证方法的适用条件。从理论出发，全面讲授求解实际问题时数值方法的有效性和可操作性，并结合实际问题的工程背景进行选择。这样有利于学生深刻理解数学理论，高效解决实际问题。本文以流体摩阻系数计算的实际案例，详细描述案例教学中理论与实际结合的必要性和可行性。

2. 流体摩阻系数数值计算案例

2.1. Colebrook-White方程介绍

在工程和科学计算的许多领域中，描述流体通过管道和罐体的过程是一个常见的问题。在机械和航空工程中，典型的应用包括液体和气体通过冷却系统的情况。流体在管道中流动的阻力用摩阻系数 f 表示。对于湍流，该系数的求解方程最常见的是 Colebrook-White 方程：

$$\frac{1}{\sqrt{f}}+2\lg\left(\frac{\varepsilon}{3.7D}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)=0 \qquad (1)$$

其中，ε 是管道内壁粗糙度，单位为 m；D 是管道内径，单位为 m；Re 是 Reynoids 数，无量纲量，其计算公式为

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho VD}{\mu} \qquad (2)$$

其中，ρ 是流体的密度，单位为 $\mathrm{kg/m^3}$；V 是流体速度，单位为 m/s；μ 是动态粘性，单位为 $\mathrm{N\cdot s/m^2}$。Reynoids 数是判断流体是否为湍流的条件，只有当 $\mathrm{Re}>400$ 时才为湍流。

对于 Colebrook-White 方程的数值求解，许多文献[4-6]都致力于找到高效的显式格式，提出了三十多种计算方法。在案例教学中显然不能逐一讲解每种方法，而且由于这些方法都是在工程求解中提出，对于方法的稳定性、收敛性等问题也没有清晰的理论分析和数学证明，不利于理论和实际的结合。因此在实际教学中，我们还是将重点放在《数值分析》教材讲解的不动点迭代法、牛顿迭代法以及 MATLAB 提供的求解工具与本案例的结合上，并在其中穿插关于稳定性的讨论及初值的选择等问题。

2.2. 牛顿迭代法求解Colebrook-White方程

在(1)式、(2)式中取参数如下：$\rho=1.23\mathrm{kg/m^3}$，$\mu=1.79\times10^{-5}\mathrm{N\cdot s/m^2}$，$D=0.005\mathrm{m}$，$V=40\mathrm{m/s}$，$\varepsilon=1.5\times10^{-6}\mathrm{m}$，并注意到摩阻系数 f 的取值范围是 0.008 到 0.08。下面讨论用数值方法求解摩擦因子 f。

先根据(2)式计算 Reynoids 数

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho VD}{\mu}=13743>400$$

所以是湍流问题，可以用 Colebrook-White 方程描述，将 Re 值及其他参数值代入(1)式，左端函数定义为 $g(f)$，有

$$g(f)=\frac{1}{\sqrt{f}}+2\lg\left(\frac{1.5\times10^{-6}}{3.7\times0.005}+\frac{2.51}{13743\sqrt{f}}\right) \qquad (3)$$

因此，根据式(1)求解摩擦因子 f 等价于求解

$$g(f)=0 \tag{4}$$

(4)式即为非线性方程的一般形式，其数值解法自然考虑最常用的牛顿迭代法。但由于牛顿迭代法是依赖初值的，需要在使用之前提醒学生考虑初值选择的重要性。部分学生忽略了这一点，初值随意取了 f 取值范围的上限 0.08，得到结果 f=NaN +NaNi，即使用牛顿迭代法得到的结果发散，于是就认为运用牛顿迭代法求解 Colebrook-White 方程失效，并陷入迷茫。可见，在实际案例求解时，不结合理论分析，盲目的使用数值方法是无法得到结果的，因此在案例教学中要强调理论与实际结合的重要性。

由于牛顿迭代法是局部收敛的，在求根之前，最好先画出函数图，以确定初始估计值，保证牛顿迭代法的有效性。本例根的估计图如图 1 所示。

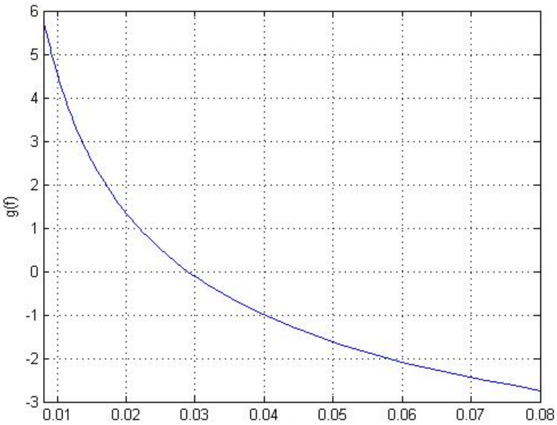

图 1 根的估计图

由图 1 可见，根大概在 0.03 附近，距离上限 0.08 较远，因此随意取初值导致了牛顿迭代法失效。选择初值 $f_0=0.03$ 再使用牛顿迭代法得到的结果见表 1。

表 1 初值 $f_0=0.03$ 的牛顿迭代法结果

迭代次数	f 估计值	近似误差
1	0.02894144086	0.0011
2	0.02896779283	2.6352e-05
3	0.02896781017	1.7332e-08

由表 1 可知，只需迭代 3 次就可以收敛于 0.02896781017，近似误差为 1.7332×10^{-8}。可见，若使用合适的初值，牛顿法的确是高效的数值计算方法，但为能发挥出其高效性，充足的理论知识是非常重要的。

对于本案例初值的选取方法，使用画图的方式虽然可以得到所需的取值，但取值过程缺乏相应的理论支持，且操作也较为复杂，需要借助软件完成。其实，案例涉及的研究内容往往有许多该领域的现成结果，可以让数值方法的使用如鱼得水，既简单又高效，这也是案例教学相较于传统教学例题的巨大优势。流体摩阻系数的计算公式众多，对于初值的估计可以使用简化的显示公式计算，例如使用 Swamee-Jain 公式：

$$f=\frac{0.25}{\left[\lg\left(\frac{\varepsilon}{3.7D}+\frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}}\right)\right]^2} \tag{5}$$

将本案例的参数代入(5)式可得 $f=0.029041$，与通过画图观察的 0.03 十分接近，将此值作为初值代入牛顿迭代公式中，得到的结果见表 2。

表 2 初值 $f_0=0.029041$ 的牛顿迭代法结果

迭代次数	f 估计值	近似误差
1	0.02896767674	7.3323e-05
2	0.02896781017	1.3343e-07
3	0.02896781017	4.4369e-13

对比表 1 和表 2 可见，取初值 $f_0=0.029041$ 的牛顿迭代法结果比 $f_0=0.03$ 每一步更精确，且该初值的计算公式(5)非常简单。因此，通过案例教学可以让学生迅速熟悉陌生的研究领域，也加深了他们对数值方法的认知。

另外，注意到牛顿迭代法在本案例摩阻系数 f 的取值范围是 0.008 到 0.08 的条件下，初值不同会影响其收敛性。在案例教学中我们还会继续讨论，在 f 的取值范围下，使牛顿迭代法收敛的初值可选区间是多少，同样可以加深学生对该方法的理解。研究结果见表 3。

表 3 牛顿迭代法不同初值第 3 步迭代的结果

初值	第 3 步 f 估计值	近似误差
0.008	0.02837021393	0.0042
0.01	0.02873850396	0.0028
0.02	0.02896747435	1.1570e-04
0.03	0.02896781017	1.7332e-08
0.04	0.02896676873	2.0324e-04
0.05	0.02880092232	0.0024
0.06	0.024810048901	0.0082
0.07	-0.0389 + 0.0399i	-0.0389 + 0.0399i（发散）
0.08	0.0314 + 0.3103i	0.0314 + 0.3103i（发散）

表 3 使用牛顿迭代法第 3 步 f 估计值进行比较，这是由于根据前面结果发现，在第 3 步已经有较精确的结果。由表 3 可知，初值取小于 0.07 时结果才会收敛，进一步加细步长可以得到初始值小于 0.0665 才会收敛。

2.3. *MATLAB内置函数求解Colebrook-White方程*

与牛顿迭代法类似，MATLAB 软件中也提供了高效的数值求解非线性方程的函数，即 fzero 函数。在案例教学中，也有部分学生由于不能自己编写牛顿迭代法的程序，便转而使用这样现成的工具作为辅助。由于不了解该函数使用的迭代模型，应跟学生强调慎重使用，对初值的选择应尤为仔细。实际上，在使用 MATLAB 软件提供的 fzero 函数求解本案例时，也会出现选择某些初值造成发散的情况。与牛顿迭代法不同的是，fzero 函数在使用取值范围下界时会发散。类似于前面的分析方法我们得到，在本例 fzero 函数初始值需选择大于 0.0153 该过程才会正常进行，例如，取初始估计值为 0.07，这虽然会使牛顿迭代法发散，但 fzero 会收敛。

2.4. *简单不动点迭代法求解Colebrook-White方程*

对于本案例的数值方法选择，最后再看看简单的不动点迭代法的计算效果。这其实也是在传统教学中经常被忽略的部分，传统教学往往只强调一般不动点迭代法的理论分析，没有真正使用该方法求解问题，并与牛顿迭代法，fzero 函数的结果进行对比。案例教学给了这些方法使用的空间，也可以帮助学生在实际应用时能够根据方法特性灵活选择，不会陷入惯性思维模式。

对于本案例，可以想到最简单的不动点函数取法是求解式(1)中的第一个 f 得到的迭代格式：

$$f_{k+1}=\varphi(f_k)=\frac{0.25}{\left[\lg\left(\frac{\varepsilon}{3.7D}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f_k}}\right)\right]^2} \qquad (6)$$

该迭代公式的迭代函数 $\varphi(f)$ 在区间 $[0.008, 0.08]$ 是关于 f 的减函数，因此它在该区间的最大值为

$$\varphi_{\max}=\varphi(0.008)=0.0350\in[0.008,0.08]$$

最小值为

$$\varphi_{\min}=\varphi(0.08)=0.0254\in[0.008,0.08]$$

再由进一步计算发现 $\varphi(f)$ 在区间 $[0.008, 0.08]$ 的导数最大值为

$$\max_{x\in[0.008,0.08]}|\varphi'(x)|=0.6834<1$$

由不动点迭代定理的推论可知，该迭代格式在区间 $[0.008, 0.08]$ 全局收敛。因此，这个简单的方法不依赖于初值，非常适合本案例，而且实际计算时只需要一个估计值，不需要估计导数。

由此可见，在流体摩阻系数数值计算案例中，求解 Colebrook-White 方程通常不只有一种方法，而且高效的牛顿迭代法和 MATLAB 提供的内置函数也未必适用于所有问题。

3. 结论

通过本文对流体摩阻系数数值计算案例的介绍，我们可以看到，案例教学通过理论联系实际，改变了单一课程的授课模式。同时，案例教学也极大的依赖于理论知识的储备，需要老师全面细致的理论讲解。总之，案例教学为构建完整的知识结构提供了一种思路，有利于学生融汇贯通学科之间的交叉和联系，培养学生的基础科研能力和综合应用数学知识解决实际问题的能力，是培养数学创新人才和进行课程体系改革的重要环节。

致谢

山东省研究生教育优质课程立项（项目编号：SDYKC17038）

山东省专业学位研究生教学案例库立项（项目编号：SDYAL18063）

REFERENCES

[1] Wang Minghui, Wang Guangbin, Zhang Wen. Application of numerical analysis, Beijing: Chemical Industry Press, 2015.

[2] Liu Sanming, The application of problem-oriented case teaching method in the course of numerical analysis, The Education and Teaching Forum, 2020 (10) : 272-273.

[3] Ma Jinfeng, Yang Lingxiang, Yao Bin, etc. Application of Case Teaching Method in College Public Mathematics Teaching, College Mathematics, 2010,26 (S1) : 78-80

[4] Zhao Bo, Li Lianfeng, Du Yukun, etc. New method for calculating hydraulic friction resistance coefficient of pipelines, Journal of Chengde Petroleum College, 2020,22 (06) : 56-60 + 80.

[5] Yuan Weimin.explicit Colebrook-White friction coefficient equation, Natural gas and oil, 2013,31 (01) : 17-19 + 6.

[6] Jia Meisheng, Yang Kang, Wei Lan, Hong Yanping, Zhang Yu. Reproduction of three explicit formulas for Colebrook-White equation, Chemical management, 2015 (26) : 265-267.