The Theoretical Derivation of a One-sided and Two-sided P Value Calculation Formula of One-dimensional Continuous Random Variables

Ying-ying Zhang

Department of Statistics and Actuarial Science, Chongqing University, Chongqing, China

***Abstract*—First of all, we derive theoretically a calculation formula of one-sided and two-sided P value for the general one-dimensional continuous random variables. Then, we give two examples to illustrate the application of this formula. Example 1 considers $\chi^2(df)$. Example 2 considers $Z \sim N(0,1)$, in this example, we make a further discussion on the two-sided P value calculation, and also point out a common mistake in the real calculation of the P value. Finally, we hope the theoretical derivation can clarify some confusions in the calculation of the P value.**

***Keywords*—P value, P_value() function, hypothesis testing, continuous random variables**

一维连续型随机变量的单侧和双侧 P 值计算公式的理论推导

张应应

重庆大学，重庆，中国

摘　要　首先，我们对一般的一维连续型随机变量从理论上推导了单侧和双侧 P 值的计算公式。然后，我们给出了两个例子来说明此计算公式的应用。例 1 考虑的是 $\chi^2(df)$。例 2 考虑的是 $Z \sim N(0,1)$，在此例中，我们对双侧 P 值的计算进行了进一步的讨论，还指出了实际 P 值计算中常犯的一个错误。最后，我们希望本理论推导可以澄清在 P 值计算中的一些困惑。

关键词　P 值，P_value()函数，假设检验，连续型随机变量

1. 引言

在假设检验[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13]中，若得到了 P 值[14,15,16,17,18,19,20]，则检验标准为：当 P 值小于指定的显著性水平 α 时，则拒绝原假设；否则不拒绝原假设。因此 P 值的计算非常重要。[9]中已有一个 R 函数 P_value()可以计算一维任意的连续型随机变量的单侧或双侧 P 值。但是[9]中关于 P 值的理论推导比较简单，并且只是针对 $Z \sim N(0,1)$ 的情形推导了，并未对一般的一维连续型随机变量的 P 值计算进行推导。本文对一般的一维连续型随机变量的 P 值计算进行了理论推导。我们希望本理论推导可以澄清 P 值计算的一些困惑。

本文剩余部分安排如下：第 2 部分推导一般的一维连续型随机变量的 P 值计算公式，并给出两个例子来说明其应用。第 3 部分总结。

2. 主要结果

我们首先对一般的一维连续型随机变量推导单侧和双侧 P 值的计算公式。假设连续型随机变量 X 的 pdf 是 $f_X(x)$，cdf 是 $F_X(x)$，支集是 $\mathcal{X}$。

注 1. $\mathcal{X}$ 可以是 $(-\infty,\infty)$，比如 $N(\mu,\sigma^2)$，$t(df)$，$DoubleExponential(\mu,\sigma)$，$Logistic(\mu,\beta)$，$\mathcal{X}$ 也可以是 $(0,\infty)$，比如 $\chi^2(df)$，$F(df_1,df_2)$，$Gamma(\alpha,\beta)$，$Exponential(\beta)$，$Lognormal(\mu,\sigma^2)$，$Weibull(\gamma,\beta)$，$\mathcal{X}$ 还可以是 (a,b)，比如 $Uniform(a,b)$，$Beta(\alpha,\beta)(a=0,b=1)$ 等。

此文采用上分位数，即 $P(X \ge X_\alpha)=\alpha$，其中 $X_\alpha = F_X^{-1}(1-\alpha)$ 是 X 的上 α 分位数，因为

$$F_X(X_\alpha)=P(X \le X_\alpha)=1-P(X \ge X_\alpha)=1-\alpha.$$

我们先考虑双侧假设的情形。

$$H_0:\theta=\theta_0,\quad H_1:\theta\ne\theta_0.$$

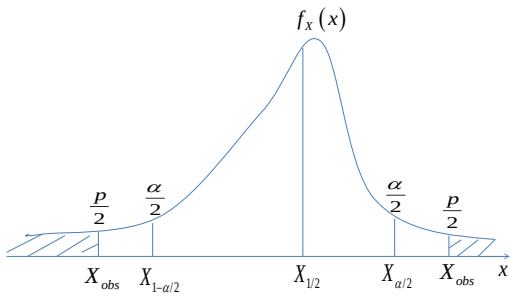

图 1. 双侧假设时 X 的密度函数和分位数图

双侧假设时 X 的密度函数和分位数图见图 1。此时对应着 side = 0，拒绝域为

$$R=\{\boldsymbol{x}: X_{obs} < X_{1-\alpha/2} \text{ or } X_{obs} > X_{\alpha/2}\}.$$

此时的 P 值是 $F_X(X_{obs})=P(X \le X_{obs})$ 的分段函数。对照图 1，当 $X_{obs} < X_{1/2}$，即 $F_X(X_{obs}) < F_X(X_{1/2})=\frac{1}{2}$ 时，

$$\text{拒绝}H_0 \Leftrightarrow X_{obs} < X_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow \frac{p}{2} < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow p<\alpha.$$

从而 P 值的定义应该满足 $\frac{p}{2}=P(X \le X_{obs})$，因此

$$p=2P(X \le X_{obs})=2F_X(X_{obs}).$$

当 $X_{obs} \ge X_{1/2}$，即 $F_X(X_{obs}) \ge F_X(X_{1/2})=\frac{1}{2}$ 时，

$$\text{拒绝}H_0 \Leftrightarrow X_{obs} > X_{\alpha/2} \Leftrightarrow \frac{p}{2} < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow p<\alpha.$$

从而 P 值的定义应该满足 $\frac{p}{2}=P(X \ge X_{obs})$，因此

$$p=2P(X \ge X_{obs})=2\left[1-P(X \le X_{obs})\right]=2\left[1-F_X(X_{obs})\right].$$

综上，我们得到在双侧假设的情形下，P 值的定义为

$$p=\begin{cases} 2F_X(X_{obs}), & \text{若}F_X(X_{obs})<\frac{1}{2}, \\ 2\left[1-F_X(X_{obs})\right] & \text{若}F_X(X_{obs})\ge\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

现在我们再来考虑单侧假设的情形。分两种情形讨论。

(a) $H_0:\theta\ge\theta_0,\quad H_1:\theta<\theta_0.$

单侧假设（$H_1:\theta<\theta_0$）时 X 的密度函数和分位数图见图 2。此时对应着 side < 0（与备择假设的不等号的方向相同），拒绝域为

$$R=\{\boldsymbol{x}: X_{obs} \le X_{1-\alpha}\}.$$

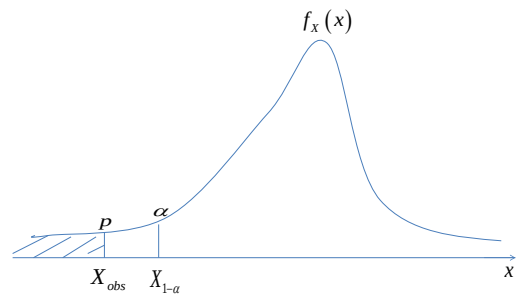

图 2. 单侧假设（$H_1:\theta<\theta_0$）时 X 的密度函数和分位数图

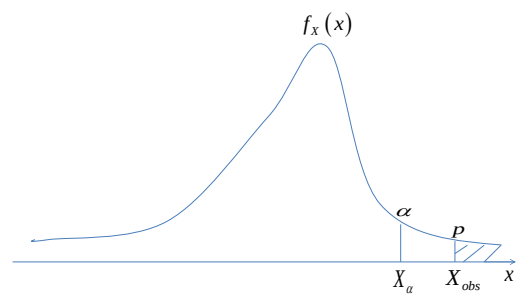

图 3. 单侧假设（$H_1:\theta>\theta_0$）时 X 的密度函数和分位数图

对照图 2，我们有

$$\text{拒绝}H_0 \Leftrightarrow X_{obs} \le X_{1-\alpha} \Leftrightarrow p<\alpha.$$

从而 P 值的定义应该满足

$$p=P(X \le X_{obs})=F_X(X_{obs}).$$

(b) $H_0:\theta\le\theta_0,\quad H_1:\theta>\theta_0.$

单侧假设（$H_1:\theta>\theta_0$）时 X 的密度函数和分位数图见图 3。此时对应着 side > 0（与备择假设的不等号的方向相同），拒绝域为

$$R=\{\boldsymbol{x}: X_{obs} \ge X_\alpha\}.$$

对照图 3，我们有

$$\text{拒绝}H_0 \Leftrightarrow X_{obs} > X_\alpha \Leftrightarrow p<\alpha.$$

从而 P 值的定义应该满足

$$p=P(X \ge X_{obs})=1-P(X \le X_{obs})=1-F_X(X_{obs}).$$

综合单侧和双侧假设的讨论，可归纳得到 P 值的定义为

$$p=\begin{cases}F_X\left(X_{obs}\right), & \text{若side}<0,\\ 1-F_X\left(X_{obs}\right), & \text{若side}>0,\\ 2F_X\left(X_{obs}\right), & \text{若side}=0\text{且}F_X\left(X_{obs}\right)<1/2,\\ 2\left[1-F_X\left(X_{obs}\right)\right], & \text{若side}=0\text{且}F_X\left(X_{obs}\right)\geq 1/2.\end{cases} \tag{2}$$

由(2)式，我们可以编写一个 R 函数来求任意的连续型随机变量 X 的 P 值。这个工作已经完成了，见[9]中的 P_value()函数。举两个特殊的例子来说明(2)的应用。

例1. $X\sim\chi^2(df)$

注意此例中 $X=(0,\infty)$，此分布也可以换成其它的 $X=(0,\infty)$的分布，见注 1。例 1 的推导只需要照搬前面的对一般的一维连续型随机变量 X 的推导即可，只需把 X 换成 $\chi^2(df)$。

例2. $X=Z\sim N(0,1)$

注意此例中 $X=(-\infty,\infty)$，且它是关于 0 点（$0=F_Z^{-1}(1/2)=Z_{1/2}$）对称的分布。此分布也可以换成其它的 $X=(-\infty,\infty)$ 的分布，见注 1。例 2 中关于单侧假设的推导也可以照搬前面的对一般的一维连续型随机变量 X 的推导，只需把 X 换成 Z 即可。下面讨论 Z 的双侧假设的情形。

$$H_0:\theta=\theta_0,\quad H_1:\theta\neq\theta_0.$$

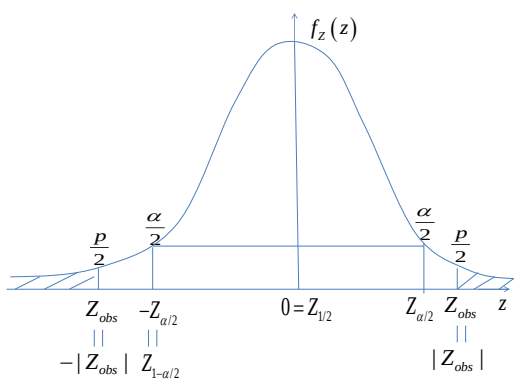

图 4. 双侧假设时 Z 的密度函数和分位数图

双侧假设时 Z 的密度函数和分位数图见图 4。此时对应着 side = 0，拒绝域为

$$R=\left\{\boldsymbol{x}:|Z_{obs}|>Z_{\alpha/2}\right\}.$$

在图 4 中，由对称性有 $Z_{1-\alpha/2}=-Z_{\alpha/2}$。对照图 4，我们有

$$\text{拒绝}H_0\Leftrightarrow|Z_{obs}|>Z_{\alpha/2}\Leftrightarrow\frac{p}{2}<\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow p<\alpha.$$

从而 P 值的定义应该满足

$$\frac{p}{2}=P\left(Z\geq|Z_{obs}|\right)=P\left(Z\leq-|Z_{obs}|\right).$$

在上式中 $Z\sim N(0,1)$ 是一个随机变量，Z_{obs} 是 Z 的实现值，它可正可负。因此

$$\begin{aligned}p&=2P\left(Z\geq|Z_{obs}|\right)=2P\left(Z\leq-|Z_{obs}|\right)\\&=P\left(Z\geq|Z_{obs}|\right)+P\left(Z\leq-|Z_{obs}|\right)\ (\text{由对称性})\\&=P\left(|Z|\geq|Z_{obs}|\right).\end{aligned} \tag{3}$$

注意(3)与(1)是等价的。在 $N(0,1)$ 或类似的关于对称轴对称的分布中，P 值的计算一般采用类似于(3)的带 $|Z_{obs}|$ 的公式，却忽略了像(1)的不带 $|Z_{obs}|$ 的分段函数的公式。现在我们来证明(3)与(1)的等价性。当 $Z_{obs}<Z_{1/2}=0$，即 $F_Z(Z_{obs})<F_Z(Z_{1/2})=\frac{1}{2}$ 时，由(3)得

$$\begin{aligned}p&=P\left(|Z|\geq|Z_{obs}|\right)=2P\left(Z\leq-|Z_{obs}|\right)\\&=2P\left(Z\leq Z_{obs}\right)=2F_Z\left(Z_{obs}\right).\end{aligned}$$

当 $Z_{obs}\geq Z_{1/2}=0$，即 $F_Z\left(Z_{obs}\right)\geq F_Z\left(Z_{1/2}\right)=\frac{1}{2}$ 时，由(3)得

$$\begin{aligned}p&=P\left(|Z|\geq|Z_{obs}|\right)=2P\left(Z\geq|Z_{obs}|\right)=2P\left(Z\geq Z_{obs}\right)\\&=2\left[1-P\left(Z\leq Z_{obs}\right)\right]=2\left[1-F_Z\left(Z_{obs}\right)\right].\end{aligned}$$

从而(3)与(1)是等价的。

(3)中的 P 值可以用 Z 的分布函数 $F_Z(\bullet)$ 来表示：

$$\begin{aligned}p&=P\left(|Z|\geq|Z_{obs}|\right)=2P\left(Z\geq|Z_{obs}|\right)\\&=2\left[1-P\left(Z\leq|Z_{obs}|\right)\right]=2\left[1-F_Z\left(|Z_{obs}|\right)\right].\end{aligned}$$

在实际计算 P 值中，人们一般采用类似于(3)的带 $|Z_{obs}|$ 的公式，但是很容易出错，比如漏掉了 2 倍，或者把 $|Z|$ 的绝对值写掉了，写成

$$p=P\left(Z\geq|Z_{obs}|\right).$$

比如在一元线性回归的 summary(lm.sol) 中，Coefficients 部分会报道 $P\text{值}=\Pr(>|t|)$，此时的 P 值应为

$$\begin{aligned}p&=P\left(|T|\geq|T_{obs}|\right)=2P\left(T\geq|T_{obs}|\right)=2\left[1-P\left(T\leq|T_{obs}|\right)\right]\\&=2\left[1-F_T\left(|T_{obs}|\right)\right]=2\left[1-\mathrm{pt}\left(|T_{obs}|,df=n-2\right)\right],\end{aligned}$$

其中 $T\sim t(n-2)$，T_{obs} 是 T 的观测值。

3. 总结

首先，我们对一般的一维连续型随机变量从理论上推

导了单侧和双侧 P 值的计算公式(2)。然后，我们给出了两个例子来说明(2)的应用。例 1 考虑的是 $\chi^2(df)$，它的 P 值推导只需要照搬一般的一维连续型随机变量的推导即可。例 2 考虑的是 $Z \sim N(0,1)$，在此例中，我们对双侧 P 值的计算进行了进一步的讨论，给出了一般情形下采用的公式(3)，并证明了(3)和 $F_X(X_{obs})$ 的分段函数(1)的等价性，还指出了实际 P 值计算中常犯的一个错误。最后，我们希望本理论推导可以澄清在 P 值计算中的一些困惑。

参考文献(References)

[1] D. Freedman et al. (authors), Z.S. Wei et al. (translators), *Statistics*. Beijing: China Statistics Press, 1997.

[2] R.A. Johnson and D.W. Wichern (authors), X. Lu (translator). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Fourth Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.

[3] H. Yang, Q.S. Liu, and B. Zhong, *Mathematical Statistics*. Beijing: Higher Education Press, 2004.

[4] H.X. Gao, *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Beijing: Peking University Press, 2005.

[5] H. Yang, B. Zhong, and Q.S. Liu, *Applied Mathematical Statistics*. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.

[6] Y.C. Tang, *R Language and Statistical Analysis*. Beijing: Higher Education Press, 2008.

[7] X.R. Chen, G.X. Ni, and C.S. Chen, *Mathematical Statistics Course*. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2009.

[8] X.M. Wang, *Applied Multivariate Analysis*. Third Edition. Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics Press, 2009.

[9] Y. Xue and L.P. Chen, *Statistical Modeling and R Software*. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.

[10] R.C. Zhang, *Mathematical Statistics*. Beijing: Science Press, 2010.

[11] X.S. Ren and X.L. Yu, *Multivariate Statistical Analysis*. Second Edition. Beijing: China Statistics Press, 2011.

[12] X.Q. He, *Multivariate Statistical Analysis*. Third Edition. Beijing: China Renmin University Press, 2012.

[13] S.L. Li, *Data Analysis and R Software*. Beijing: Science Press, 2013.

[14] D.M. Fan, "The P value of hypothesis test," *Journal of Zhengzhou Economic Management Cadre Institute*, vol. 17, no. 4, pp. 70-71, 2002.

[15] Z.X. Han and L. Zhang, "P value test and hypothesis testing," *The Border Economy and Culture*, no. 4, pp. 62-63, 2006.

[16] J.H. Fu, "Classic test P values on several issues," *Statistics and Decision*, no. 1, pp. 156-157, 2009.

[17] J.K. Chen, "On the P value of testing statistical hypotheses," *Value Engineering*, no. 25, pp. 257-258, 2011.

[18] G.Z. Zhi et al., "The flexible application of value P in hypothesis tests," *College Mathematics*, vol. 27, no. 5, pp. 152-156, 2011.

[19] M.H. Zhang, "Information entropy and P value," *Mathematical Medicine Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 189-191, 2012.

[20] G. Yang, "The study of P value in the hypothesis testing," *Journal of Henan Institute of Engineering (Natural Science Edition)*, vol. 24, no. 2, pp. 65-67, 2012.